暨南大學
JINAN UNIVERSITY

2025 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题 A 卷

****

招生专业与代码：071400 统计学、070101 基础数学、070102 计算数学、070103 概率论与数理统计、070104 应用数学、070105 运筹学与控制论

考试科目名称及代码：**709《数学分析》A 卷**

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

一、计算题(每小题 10 分，共 90 分)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\dfrac{a}{x})^{x^2}\ (a\neq 0)$;

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$;

3. 求 $x_n = n + n\cos n\pi + \sin\dfrac{n\pi}{4}$ 的上下极限；

4. 求不定积分 $I=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}$;

5. 设 $z=\dfrac{x^2+y^2}{xy}\arctan\sqrt{1+x^2+y^2}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

6. 设 $V=\{(x,y,z)\,|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\}$，计算积分 $\iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz$;

7. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2^n}$ 的和；

8. 计算下面曲面积分 $\oiint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=h$ 所围空间区域($0\le z\le h$)的表面，方向取外侧.

9. 设函数 $f(x)$ 在点 a 可导，且 $f(a)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$.

二、判断题(先判断对错，对的要给出证明，错误的要举反例加以说明，每小题 10 分，共 20 分)

10. 设函数 $f(x), g(x)$都在$(-\infty,\infty)$上一致连续，问 $h(x)=f(x)g(x)$ 是否也在（$-\infty$，∞）上一致连续？若进一步假设存在实数a,b使得 $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=a, \lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)=b$, 问 $h(x)$ 是否在（$-\infty$，∞）上一致连续？

11. 设函数 $f(x)$ 在（$-\infty$，∞）上连续，且 $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=-\infty$. 则 $f(x)$ 在（$-\infty$，∞）能取到最大值，即 $\exists x_0 \in(-\infty,+\infty)$ 使得 $f(x_0)\geq f(x), \forall x\in(-\infty,+\infty)$.

三、证明或讨论题（每题 10 分，共 40 分）

12. 设非负函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(1)=0$. 证明：$\exists \xi\in[0,1]$使得$f(\xi)=\int_0^{\xi} f(x)dx.$

13. 研究函数 $F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性，这里 $f(x)$ 是定义在[0,1]上的正的连续函数.

14. 设函数 $f(x)$ 在[a,b]上连续，在(a,b)上可导，且 $a\cdot b>0$,证明存在 $\xi\in$（a,b）使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

15. 证明：含参变量广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x(1+y)}dy$ 在（0，∞）内不一致收敛.