



暨南大学
JINAN UNIVERSITY

2025 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

招生专业与代码：071400 统计学，070101 基础数学，070102 计算数学，070103 概率论与数理统计，070104 应用数学，070105 运筹学与控制论

考试科目名称及代码：810 高等代数(A 卷)

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

1. (15 分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0.$$

2. (15 分) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是多项式 $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ 的根, $g(x) = x^2 + 3x + 1$, 求一个有理系数的多项式 $p(x)$ 使得 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), g(\lambda_3)$ 成为它的根.

3. (15 分) 方程组

$$\begin{cases} 2025x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2025x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 2025x_1 + 4x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \end{cases}$$

与 $2025x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda - 1$ 有公共解, 求 λ 的值及公共解.

4. (15 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, 是否存在矩阵 X 使得 $A = X^{2025}$? 若存在, 请求出矩阵 X ; 若不存在, 请说明理由.

5. (15 分) 设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间, V_1, V_2 是 V 的子空间, $V = V_1 \oplus V_2$. 设 B 是 V 上的线性变换. 证明: B 是可逆的线性变换当且仅当 $V = B(V_1) \oplus B(V_2)$.

6. (20 分) 假设矩阵 A, B, C 满足乘积 ABC 有意义. 求证: $\text{秩}(AB) + \text{秩}(BC) \leq \text{秩}(ABC) + \text{秩}(B)$.

7. (15 分) 判断二次型 $x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$ 的正定性.

8. (20 分) 设 A 为 n 阶正定实对称矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n+1$ 个向量, 已知:

(1) $\alpha_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$;

(2) $\alpha_i^T A \alpha_j = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$;

(3) β 与 α_i 正交, $i = 1, 2, \dots, n$.

证明: β 为零向量.

9. (20 分) 设 $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ 为 2025 阶正定矩阵.

(1) (5 分) 证明: $|2025E + A| > 2025^{2025} + |A|$;

(2) (5 分) 若 A 的最大特征值为 1, 证明

$$\sum_{i,j=1}^{2025} a_{i,j} \leq 2025;$$

(3) (10 分) 证明: $|tA + (1-t)B| \geq |A|^t \cdot |B|^{1-t}$, 其中 $t \in [0, 1]$.