暨南大学
JINAN UNIVERSITY

2022年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

****

招生专业与代码：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、运筹学与控制论、统计学 应用数学

考试科目名称及代码：709 数学分析

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

本试卷满分为150分，考试时间为3小时。

一、计算题（共10小题，每小题10分，共100分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a>1, b>1, c>1$ 均为常数.

2. 设 $f(x)=x^2\cos(2x)$，求 $f^{(2023)}(0)$.

3. 求不定积分 $\int e^{2022x}\sin(2022x)\,dx$.

4. 求抛物球面 $z=2(x^2+y^2)$，$z=x^2+y^2$ 以及 $z=2$ 所围闭区域的体积.

5. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2(\sin\frac{1}{n^2})}$ 的收敛性.

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n-1}{n!}x^{2n}$ 的收敛半径，并求其在收敛区域内的和函数.

7. 求 $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{1}{1+x^2+2\alpha^2}\,dx$.

8. 求常数 a,b 使得 $(\ln(1+ax))^2-\sin^2(bx)+x^3$ 在 $x\to0$ 时为 x 的4阶无穷小.

9. 求 $\oiint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$，其中 S 是立体 $0\leqslant x,y,z\leqslant a$ 的表面，方向取外侧.

10. 验证积分 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}x\,dx+y^2\,dy-z^3\,dz$ 与路径无关，并计算积分值.

二、证明题（共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

1. (1) 证明对每个正整数 $n>1$，方程 $2=1+2x+3x^2+\cdots+(n+1)x^n$ 在 $(0,1)$ 内有且只有一个根，记此根为 x_n.

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. 设 $0<\alpha<1$.

(1) 证明 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-2}\sin(\alpha x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 设 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty} x^{\alpha-2}\sin(\alpha x)\mathrm{d}x$，则 $F(\alpha)$ 在 $(0,1)$ 上连续.

3. 设 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续.

(1) 证明 $\{\sin^n x f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上逐点收敛.

(2) 证明 $\{\sin^n x f(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上一致收敛的充分必要条件是 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

4. 证明：当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$.

三、分析题（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^a\ln\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ b, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(1) 在 a,b 取何值时 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续?

(2) 在 a,b 取何值时 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微?