2024年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

****

招生专业与代码：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论.

考试科目名称及代码：《数学分析》B卷 709

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

一. 计算题(每小题10分，共90分)

1、假设 $x\neq 0$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-\ln(1+x)-1}{[\ln(1+2x)]^2}$.

3、求 $\int_0^{2024\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

4、假设 $y=e^{2x}x^2$，求 $y^{(20)}$.

5、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

6、计算 $\int\dfrac{5x^2+1}{x(x^2+1)}dx$.

7、假设 m,n 是正整数，求 $\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$.

8、设 $f(x)=(\arctan x)^{\ln x}$，$x\in(0,+\infty)$，求 $f'(x)$.

9、求由曲线 $2y=x$，$y^2=x$ 所围成的平面图形，围绕 y 轴所得的旋转体体积.

二. 证明题(每小题 10 分，共 40 分)

1、设有两组正数数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，记 $K_n = b_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}$，$n \geq 1$. 若存在正数 c 使得对任意 $n \geq 1$ 总有 $K_n > c$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

2、设 $f_0(x)$，$f_1(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的两个可微函数，满足

$$f_0 \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ f_0' & f_1' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

证明对任意给定的 $\lambda_0, \lambda_1 \in R \setminus \{0\}$，函数 $F(x) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上最多有 1 个零点，且若存在零点，则 F 在该零点的一阶导数不等于零.

3、设 $P(x,y), Q(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续可微函数，D 是平面上由光滑简单闭曲线 L 围成的闭区域. 设 L 的参数表达式为 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$，其中 $t \in [0,1]$ 且满足

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi(1), \\ \psi(0) = \psi(1). \end{cases}$$

若 $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$ 在闭区域 D 上无解，证明下列等式一定不成立：

$$\begin{cases} \varphi'(t) = P(\varphi(t), \psi(t)), \\ \psi'(t) = Q(\varphi(t), \psi(t)). \end{cases}$$

4、设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. 证明 $f(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 上恒成立.

三. 分析题(每小题 10 分，共 20 分)

1、设 $f_n(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - x^3 + x^4$，分析 $x = 0$ 是否为函数的极值点.

2、设函数序列 $f_n(x) = e^{n(x-1)}$，$0 < x < 1$，分析该序列的收敛性与一致收敛性.