JINAN UNIVERSITY

# 2024年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

*******************************************************************************************

招生专业与代码：070101 基础数学、070102 计算数学、070103 概率论与数理统计、070104 应用数学、070105 运筹学与控制论

考试科目名称及代码：810 高等代数（B 卷）

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

1、（10 分）请陈述代数基本定理和哈密顿-凯莱（Hamilton-Caylay）定理.

2、（10 分）当 $m, p, q$ 适合什么条件时，有 $x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$.

3、（10 分）证明：如果 $A$ 和 $B$ 都是实对称矩阵，那么 $A+B$ 也是实对称矩阵，但 $AB$ 不一定是实对称矩阵.

4、（15 分）证明：如果 $A$ 是实 $4\times 4$ 正定矩阵，并且它的最大特征值是 2024；$Y$ 是欧几里得空间 $R^4$ 中的一个列向量，其长度为 1，那么 $Y^TAY$ 的值一定不超过 2024.

5、（15 分）是否存在 $R^2$ 中的线性变换 $A$，它既保持上半平面的点不动，又将下半平面的点反射到上半平面？其中反射的意思是 $(x,y)\to(x,-y)$. 如果回答存在，请举一个例子说明；如果回答不存在，请给出证明.

6、（15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维欧氏空间 $R^3$ 中一组向量，记

$$C=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & (\alpha_1,\alpha_3)\\(\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & (\alpha_2,\alpha_3)\\(\alpha_3,\alpha_1) & (\alpha_3,\alpha_2) & (\alpha_3,\alpha_3)\end{pmatrix},$$

其中$(\alpha_i,\alpha_j)$表示$\alpha_i,\alpha_j$的内积，$i,j=1,2,3$. 证明：如果 $C$ 是可逆矩阵，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

7、（15 分）当 $k$ 取何值时，下列齐次线性方程组仅有零解？请说明具体理由.

$$\begin{cases} kx_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ (k+2)x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + kx_4 = 0 \end{cases}.$$

8、（10 分）考虑 $R^2$ 的子集 $X = \{(x,0) \mid x \in R\}$, $Y = \{(0,y) \mid y \in R\}$.

（1）$R^2$ 是 $X$ 与 $Y$ 的直和 $X \oplus Y$？请说明理由；

（2）$R^2$ 是 $X$ 与 $Y$ 的并集 $X \cup Y$？请说明理由.

9、（15 分）设 $A, B, C, D$ 都是 $4 \times 4$ 矩阵，且 $A$ 可逆，$AC=CA$. 证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

10、（15 分）证明：如果 $A$ 是实 $4 \times 4$ 矩阵，那么秩$(A^TA) =$ 秩$(A)$，其中 $A^T$ 是 $A$ 的转置.

11、（20 分）设 $X$ 是 20 维欧几里得空间 $R^{20}$ 中的一个非零列向量，则 $XX^T$ 为 $20 \times 20$ 矩阵，记为 $A$，其中 $X^T$ 是 $X$ 的转置. 证明：

（1）$A$ 是半正定矩阵，并且它的行列式等于零；

（2）$A$ 有且只有一个非零特征值.