2023年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

****

招生专业与代码：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论.

考试科目名称及代码：《数学分析》 A 卷 709

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

一：计算题(每小题10分，共90分)

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cos(n+\frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n+1})}{\sqrt[3]{n^2}+2023n-2022}$.

2、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt[3]{x+1}-\cos\sqrt[3]{x}\right)\cdot x^{\frac{1}{3}}$.

3、计算$\int_L xy\,ds$的值，其中L是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$(b>a>0)$在第一象限的部分.

4、令$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 求$f^{(4)}(0)$的值.

5、计算 $\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

6、计算 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{|x|^{\frac{1}{3}}\left(\sin\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}+\sin x\cos x+1\right)}{1+x^{\frac{4}{3}}}dx$.

7、令$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$，求$f^{(4)}(3)-f(3)$的值.

8、当$b>a>0$时，计算$\displaystyle\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$的值.

9、令$f(x)=(1-\dfrac{1}{x})^x, x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. 求$f'(x)$.

二：证明题(每小题10分，共40分)

1、设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+n\,a_n}{1+2+3+\cdots+n} = a.$

2、设$f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x$. 证明对于任意自然数n，方程$f_n(x)=1$在$[0,\dfrac{\pi}{3})$内有且只有一个根x_n. 进一步的证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且为$\dfrac{\pi}{3}$.

3、设f(x)是定义在实数集ℝ上的连续函数，且$f'(0)$存在. 若对于$\forall y\in\mathbb{R}$成立:

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},$$

试证明：f(x)是定义在实数集ℝ上是可微函数.

4、设f(x)是定义在实数区间[a,b]上的二阶可导函数，且计算$f''(x)\ge 0$. 试证明：

$$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

三、分析题(每小题10分，共20分)

1、记$f_n(x)=xn^ke^{-nx}, x\in[0,\infty)$. 分析参数k在哪个区间内可以使得函数列$f_n(x)$在$[0,\infty)$上一致收敛.

2、计算$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$的值，其中曲面S是球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，且曲面的积分为指向球面外侧.